

Roll No. ....

**DD-2708**

**B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part II)  
EXAMINATION, 2020**

**MATHEMATICS**

**Paper First**

**(Advanced Calculus)**

*Time : Three Hours*

*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$  का मूल्यांकन

कीजिए।

(A-51) P. T. O.

Evaluate :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{2}{1} \right)^1 \left( \frac{3}{2} \right)^2 \left( \frac{4}{3} \right)^3 \dots \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि श्रेणी :

$$1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{2^2 x^2}{\lfloor 2} + \frac{3^3 x^3}{\lfloor 3} + \dots, \quad x > 0$$

अभिसारी है या अपसारी :

Prove that the series :

$$1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{2^2 x^2}{\lfloor 2} + \frac{3^3 x^3}{\lfloor 3} + \dots, \quad x > 0$$

is convergent or divergent ?

(स) श्रेणी :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test for convergence and absolute convergence of series :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित फलन का  $x = 0$  पर सांतत्यता के लिए परीक्षण कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x e^{1/x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Test for continuity of the following function at  $x = 0$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(ब) कौशी मध्यमान प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy mean value theorem.

(स) फलन :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

के लिए अंतराल  $[2, 4]$  में लैग्रान्ज के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Lagrange's mean value theorem for the function :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

in the interval  $[2, 4]$ .

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि :

$$u = x \sin^{-1} \left( \frac{x}{y} \right)$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

If:

$$u = x \sin^{-1} \left( \frac{x}{y} \right)$$

then prove that :

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(ब) समीकरण :

$$\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

का रूपान्तरण  $\tan z = e^x$  रखकर कीजिए।

Transform the equation :

$$\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

by substitution  $\tan z = e^x$ .

(स) यदि :

$$x = a \cosh \alpha \cos \beta$$

$$y = a \sinh \alpha \sin \beta$$

तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{a^2}{2} [\cosh 2\alpha - \cos 2\beta]$$

If:

$$x = a \cosh \alpha \cos \beta$$

$$y = a \sinh \alpha \sin \beta$$

then show that :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{a^2}{2} [\cosh 2\alpha - \cos 2\beta]$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सरल रेखाओं के कुल :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ कोण  $\alpha$  प्राचल है।

Find the envelope of the family of lines :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

where the parameter is the angle  $\alpha$ .

- (ब) अतिपरवलय  $2xy = a^2$  का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the hyperbola  $2xy = a^2$ .

- (स) प्रतिबन्धों :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

तथा  $lx + my + nz = 0$

के अंतर्गत  $u = x^2 + y^2 + z^2$  के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find the maxima and minima value of the function

$u = x^2 + y^2 + z^2$  using the conditions :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

and  $lx + my + nz = 0$ .

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad (m, n > 0)$$

Prove that :

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad (m, n > 0)$$

(ब) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_1^e \int_0^{\log y} \int_1^{e^x} \log z \, dy \, dx \, dz$$

Evaluate :

$$\int_1^e \int_0^{\log y} \int_1^{e^x} \log z \, dy \, dx \, dz$$

(स) समाकलन का क्रम बदलिए :

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} \, dx \, dy$$

और इसका मूल्यांकन भी कीजिए।

Change the order of integration :

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} \, dx \, dy$$

and hence evaluate it.